МЕТАФИЗИКА ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

СТАНОВЛЕНИЕ НОВОЕВРОПЕЙСКОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ: ПРЕОДОЛЕНИЕ ПАРАДОКСОВ АКТУАЛЬНО БЕСКОНЕЧНОГО

П.П. Гайденко

Институт философии РАН

По отношению к XVII в. понятие научной революции мыслится некоторыми исследователями столь радикально, что предшествующий период развития научного знания, а именно античная и средневековая наука, объявляются либо вообще не-наукой, пред-наукой и т.д., либо «совсем другой наукой», не имеющей ничего общего с математикой и естествознанием XVII–XVIII вв. В этой ситуации исследование судьбы античных научных традиций позволяет внести нужные коррективы, установив более точный смысл понятия «научной революции», то есть ограничив его, ибо оно сегодня имеет тенденцию утратить свою границу и из научного понятия превратиться в идеологическое.

Хорошо известно, что в XVII в. пересматривается ряд принципов и понятий античной и средневековой науки. Во-первых, на место конечного космоса встает бесконечная вселенная и пространство из анизотропного становится» изотропным. Во-вторых, меняется понимание движения – основного понятия физики и натурфилософии: закон аристотелианской физики «все движущееся движется чем-нибудь» заменяется законом инерции, благодаря чему отменяется прежде незыблемое противопоставление движения и покоя как качественно разных состояний. Закон инерции как раз предполагает бесконечность вселенной, благодаря которой круговое движение, прежде считавшееся самым «совершенным», «выпрямляется» и приравнивается к прямолинейному. В-третьих, не остаются неизменными и основания математики; становление новой механики как основной науки о природе имеет в качестве своей предпосылки создание инфинитезимального исчисления, которое первоначально – у Галилея, Кавальери, Торричелли и др. – сопровождается пересмотром важнейших положений античной математики, и прежде всего метода исчерпывания, который на первый взгляд кажется сходным с дифференциальным исчислением.

Мы упомянули только самые значительные изменения, произошедшие в XVI–XVII вв., но их вполне достаточно, чтобы охарактеризовать этот период как научную революцию. Наибольшей критике в XVII в. подверглась перипатетическая программа, и не только физика и космология, но и метафизика Аристотеля, столь авторитетного в Средние века, стала главной мишенью нападок Галилея и Декарта, Фр. Бэкона и П. Гассенди. Аристотелевской научной программе прежде всего противопоставлялась математическая – платоновско-пифагорейская или атомистическая – демокритова, а нередко и «синтез Платона и Демокрита», как охарактеризовал галилееву механику А. Койре. Уже сам факт такого противопоставления, кстати, свидетельствует о том, что пересмотр античных научных традиций был отнюдь не универсальным, хотя в Новое время существенно меняется не только структура античной математики, но и понятие атома не всегда совпадает с демокритовским.

Мне, однако, хотелось бы показать, что и судьба некоторых принципов аристотелевской программы оказалась в новое время не столь однозначной, как первоначально может показаться. Прежде всего, это принцип непрерывности, как его сформулировал Аристотель в «Физике». Этот принцип фундаментален для Аристотеля; с его помощью греческий философ решал целый ряд проблем, возникших не только в физике и математике, но и в философии – в связи с апориями Зенона. Здесь мы, по-видимому, вправе говорить именно о **прогностической** функции философии по отношению к науке, функции, специально рассмотренной в работах В.С. Степина [1].

Как известно, элеец Зенон пытался доказать, что ни множественность, ни движение невозможно мыслить без противоречия. В основе апорий Зенона лежит допущение актуальной бесконечности, которое, собственно, и приводит к противоречию всякий раз, когда речь идет о множественности и движении. Зенон в апориях «Дихотомия» и «Ахиллес» исходит из допущения бесконечной делимости пространства, которое, в силу этого, невозможно пройти до конца. Апории «Стрела» и «Стадий» основаны на допущении актуально бесконечного множества неделимых «моментов» времени и «точек» пространства.

Поскольку Аристотелю необходимо доказать мыслимость движения без противоречия, – в противном случае физика как наука о движении невозможна – он вводит принцип непрерывности, играющий фундаментальную роль в его научной программе. Непрерывность, по Аристотелю, есть определенный тип связи элементов системы, отличный от последовательности и смежности. Важно уяснить различие между смежным и непрерывным: если предметы соприкасаются, но при этом сохраняют каждый свои края, так что соприкасающиеся границы не сливаются в одну общую, то мы имеем дело со смежностью; если же граница двух предметов (отрезков линии, «частей времени» и т.д.) является общей, то тут речь идет о непрерывности [2, V, 3.226b–227a].

Непрерывными, по Аристотелю, могут быть не только части пространства и времени, но и движения; более того, подлинно непрерывным он считает то, что непрерывно по движению [2, V, 4]. Чтобы движение было непрерывным, должны быть выполнены три условия: единство (тождественность) вида движения, единство движущегося предмета и единство времени.

Из определения непрерывного вытекает, что оно делится на части, делимые до бесконечности и, стало быть, не может быть и состоять из неделимых. Таким образом, Аристотель разрешает апории Зенона «Стрела» и «Стадий». Остаются, однако, две первых апории – «Дихотомия» и «Ахиллес», основанные на допущении бесконечной делимости пространства и времени. Здесь для разрешения противоречия Аристотель действует иначе. Если любой отрезок пути в силу его непрерывности делим до бесконечности, то трудность устраняется, если учесть, что непрерывности пути соответствует непрерывность времени. «Поэтому ошибочно рассуждение Зенона, что невозможно пройти бесконечное, то есть коснуться бесконечного множества отдельных частей в ограниченное время. Ведь длина и время, как и вообще все непрерывное, называются бесконечными в двояком смысле: или в отношении деления, или в отношении границ. И вот, бесконечного в количественном отношении нельзя коснуться в ограниченное время, бесконечного согласно делению – возможно, так как само время в этом смысле бесконечно. Следовательно, приходится проходить бесконечность в бесконечное, а не в ограниченное время и касаться бесконечного множества частей бесконечным, а не ограниченным множеством» [2, VI, 2, 233a].

Аристотелево определение непрерывности базируется на тех же предпосылках, что и принцип отношений Евдокса, получивший название также аксиомы Архимеда и сформулированный Евклидом в четвертом определении V книги «Начал»: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга» [3, с. 142]. Аристотель полностью принимает евдоксов принцип отношений, который по существу разрешает парадокс «Дихотомия».

Аристотель, как принято в греческой математике, не принимает понятия актуальной бесконечности. Он пользуется только понятием потенциально бесконечного, то есть бесконечно делимого, которое, «будучи проходимым по природе, не имеет конца прохождения, или предела» [2, III, 6, 206b].

Сказать, что бесконечное существует только как потенциальное, а не как актуальное – значит сказать, что оно становится, возникает, а не есть нечто законченное, завершенное, не есть **бытие**. Пример потенциально бесконечного – это беспредельно возрастающий числовой ряд, ряд натуральных чисел, который, сколько бы мы его ни увеличивали, остается конечной величиной. Потенциально бесконечное всегда имеет дело с конечностью и есть беспредельное движение по конечному. Принцип непрерывности, как его сформулировал Аристотель, базируется на понятии потенциально бесконечного.

Бесконечное, таким образом, есть, по Аристотелю, возможное, а не действительное, материя, а не форма: не случайно же материю Аристотель понимает как возможность. Не допуская актуальной бесконечности, Аристотель определяет бесконечное как то, вне чего еще всегда что-то есть [2, III, 6, 207b].

Бесконечное – это материя, то есть в ее аристотелевском понимании нечто неопределенное, не имеющее в себе связи и лишенное всякой структуры. Целое же – это материя оформленная, и «конец», «граница», структурирующая его и делающая чем-то актуально сущим, действительным, – это форма. Именно потому, что началом актуально сущего является форма, а форма есть **предел**, начало цели (она же – «конец», граница), он отвергает возможность актуально бесконечного: такое понятие является, по Аристотелю, как, впрочем, и по Платону, самопротиворечивым.

Несмотря на напряженные споры вокруг понятий бесконечного и непрерывного средневековая физика и математика признавала как теорию отношений Евдокса, так и аристотелево понятие непрерывного. Философско-теоретическому пересмотру эти античные принципы были подвергнуты в эпоху Возрождения Николаем Кузанским и Джордано Бруно. В рамках же собственно физики и математики они были поставлены под сомнение и в сущности отвергнуты Галилеем и его учеником Кавальери, стоявшими у истоков инфинитезимального исчисления [4].

Проблема непрерывности обсуждается Галилеем в разных контекстах. Так, например, рассматривая вопрос о причинах сопротивления тел разрыву или деформации и считая причиной мельчайшие «пустоты» или «поры» в телах, Галилей сталкивается с таким аргументом: как объяснить большую силу сопротивления некоторых материалов, если при ничтожном размере «пустот» и сопротивление их должно быть ничтожным? Отвечая на этот вопрос, Галилей пишет: «Хотя эти пустоты имеют ничтожную величину и, следовательно, сопротивление каждой из них легко превозмогаемо, но неисчислимость их количества неисчислимо увеличивает сопротивляемость» [5, с. 131]. Понятие ничтожно-малых пустот характерно: ничтожно-малое, в сущности, не есть конечная величина, ибо в этом случае число пустот в любом теле было бы исчислимым. Что Галилей хорошо понимает заключающуюся здесь проблему и трудность, свидетельствует следующая беседа Сагредо и Сальвиати: «Если сопротивление не бесконечно велико, – говорит Сагредо, – то оно может быть преодолено множеством весьма малых сил, так что большое количество муравьев могло бы вытащить на землю судно, нагруженное зерном... Конечно, для того чтобы это было возможно, необходимо, чтобы и число их было велико: мне кажется, что так именно обстоит дело и с пустотами, держащими связанными частицы металла.

Сальвиати. Но если бы понадобилось, чтобы число их было бесконечным, то сочли бы вы это невозможным?

Сагредо. Нет, не счел бы, если бы масса металла была бесконечной, в противном случае...» [5, с. 131-132].

Мысль Сагредо ясна: в противном случае мы окажемся перед парадоксом Зенона: как бы малы ни были составляющие элементы, но если они имеют конечную величину, то бесконечное их число в сумме даст величину бесконечную – неважно, идет ли речь о массе металла, длине линии или величине скорости. На этом принципе стояла как античная математика, так и античная физика. Но именно этот принцип и хочет оспорить Галилей. Вот ответ Сальвиати на соображения Сагредо: «В противном случае – что же? Раз мы уже дошли до парадоксов, то попробуем, нельзя ли каким-либо образом доказать, что в некоторой конечной непрерывной величине может существовать бесконечное множество пустот» [5, с. 132]. Доказательство Галилея состоит в допущении тождества круга и многоугольника с бесконечным числом сторон, то есть образований, с точки зрения античной математики, не могущих иметь между собой никакого отношения. Именно предельный переход от многоугольника к кругу путем допущения многоугольника с актуально бесконечным числом сторон составляет основание вводимого Галилеем метода инфинитезимального исчисления. Использование актуально бесконечного в математике, по мнению Галилея, расширяет возможности последней. Именно Галилей пользуется понятием **неделимого**, на основе которого строит затем геометрию неделимых его ученик Кавальери [6]. Эти неделимые Галилей именует «неконечными частями линии», «неделимыми пустотами», «атомами». Природа их парадоксальна, противоречива: они не являются ни конечными величинами, ни «нулями». Из них-то, по Галилею, и состоит непрерывная величина.

Характерно, что в XVIII в., когда бурно обсуждалась природа этой самой «бесконечно малой», Вольтер со свойственным ему остроумием определил математический анализ как «искусство считать и точно измерять то, существование чего непостижимо для разума» [7, с. 176].

Галилей, вводя понятие «бесконечного числа бесконечно малых», принимает таким образом в качестве предпосылки актуальную бесконечность, которой избегала античная математика, как и античная физика.

Вслед за Галилеем Кавальери, принимая те же предпосылки, предложил метод составления непрерывного из неделимых. При этом характерно название работы Кавальери: «Геометрия, изложенная новым способом при помощи **неделимых непрерывного**» (первое ее издание вышло в 1635 г.). Название полемично по отношению к принципу отношений Евдокса-Архимеда, как и к принципу непрерывности Аристотеля, который в XIII в. кратко сформулировал Фома Аквинский: «Ничто непрерывное не может состоять из неделимых» [8, s. 191]. Каким образом непрерывное составлено из неделимых, Кавальери поясняет, в частности, в предложении XXXV второй книги «Геометрии»: «Построенный на каком-либо прямоугольнике параллелепипед, высотой которого служит некоторая прямая линия, равен (сумме) параллелепипедов, имеющих основаниями тот же прямоугольник, а высотами какие угодно части, на которые может быть разделена высота. Если же представим себе, что прямоугольник, служащий основанием, разделен каким угодно образом на какое угодно число прямоугольников, то указанный параллелепипед будет равен (сумме) параллелепипедов, имеющих высотами отдельные части высоты, а основанием – отдельные части основания» [9, с. 277]. Плоская фигура мыслится, таким образом, как совокупность всех линий, а тело – как сумма всех его плоскостей.

Интересно разъяснение, которое дает Кавальери новому методу, прямо указывая на то, что ему не ясна природа «неделимого», с помощью которого он «составляет» геометрические объекты, а потому не ясна и сущность самого «составления»: «Я пользовался тем же приемом, каким пользуются алгебраисты для решения предлагаемых им задач: хотя бы корни чисел были **неопределимы, непостижимы и неизвестны**, они их тем не менее складывают вместе, вычитают, умножают и делят и, если только они окажутся в состоянии получить в результате этих манипуляций нужное им решение предложенной задачи, они считают, что достигли цели. Как раз так же я оперирую с совокупностью линий или плоскостей: пусть они, поскольку речь идет об их числе, неопределимы и неизвестны; поскольку речь идет об их величине, они ограничены всякому видными пределами» [9, с. 89]. Кавальери сознает, что понятие актуальной бесконечности, с которым оперирует геометрия неделимых, порождает «сомнения, связанные с опасностью плавания у скал этой бесконечности» [9, с. 91]. Это сознание, как и та критика, которой подверглось понятие континуума как «совокупности неделимых» со стороны современников Кавальери [10], заставили его в седьмой книге «Геометрии» уточнить метод, примененный им в первых шести книгах. Если первоначально Кавальери сравнивал между собой совокупность всех линий одной плоской фигуры с совокупностью всех линий другой (аналогично – и плоскостей, из которых составлены тела), то в седьмой книге он сравнивал любую линию одной фигуры с соответствующей линией другой или одну плоскость одной фигуры тела с плоскостью другого. Таким путем он избегал необходимости оперировать понятиями «все линии» и «все плоскости». Поясняя свое ограничение, Кавальери писал: «Мы намеревались доказать лишь то, что отношение между континуумами соответствует отношению между неделимыми и наоборот» [12, p. 2].

Самое удивительное, однако, состоит в том, что одним из критиков Кавальери оказался также и... Галилей, сам, как мы знаем, предлагавший составлять непрерывное из бесконечно большого числа неделимых! Из переписки Кавальери известно, что Галилей не хотел признать правомерности понятий «все плоскости данного тела» и «все линии данной плоскости». Это кажется неожиданным, если мы вспомним, что Галилей допускал «строение континуума из абсолютно неделимых атомов» [5, с. 154], хотя и не мог разъяснить природу этих неделимых [13]. Как мы уже выше могли видеть, Галилей рассуждал о неделимых не только с точки зрения математической, но и как физик. Размышляя о природе континуума в работе «Разные мысли», Галилей утверждает: «Бесконечность должна быть вовсе исключена из математических рассуждений, так как при переходе к бесконечности количественное изменение переходит в качественное, подобно тому, как, если мы будем самой тонкой пилой размельчать тело, то как бы мелки ни были опилки, каждая частица имеет известную величину, но при бесконечном размельчении получится уже не порошок, а жидкость, нечто качественно новое, причем отдельные частицы вовсе исчезнут» [9, с. 37].

В чем тут дело? Почему Галилей то допускает понятие актуальной бесконечности, то запрещает его? Почему он критикует Кавальери за метод, каким пользовался сам? Вот что думает по этому поводу С.Я. Лурье, переводчик «Геометрии» Кавальери и автор предисловия к переводу: «Галилей вообще не выставил никакой связной математической теории неделимых: стоя на атомистической точке зрения (непрерывное состоит из неделимых, линия состоит из точек), он в то же время видел логические несообразности, к которым приводила эта теория; компромисс Кавальери его не удовлетворял, он не хотел понять Кавальери, чувствовал, что математический атомизм необходим для дальнейшего прогресса математики, но не знал, как сделать его теоретически приемлемым» [14, с. 39]. Вероятно, С.Я. Лурье здесь недалек от истины, хотя его утверждение о том, что Галилей в своем учении о неделимых следует Демокриту, вряд ли можно принять без оговорок. Галилей пытается найти объединение физического атомизма Демокрита с математическим атомизмом, которого у Демокрита не было, а потому опирается скорее на Архимеда [15]. Но позиция его в этом вопросе с психологической точки зрения очень показательна; то, что он позволяет себе, хотя и не без некоторых оговорок, крайне раздражает его у другого: тут с особой ясностью ему видны логические противоречия, связанные с понятием актуальной бесконечности, в частности – с бесконечно малым. Как бы то ни было, очевидно одно: Галилею не удалось удовлетворительно разрешить проблему континуума на пути, отличном от евклидовско-аристотелевского, и он, критикуя Кавальери, вынужден признать, что вместе с неделимым в математику входят неразрешимые парадоксы.

Не удивительно, что Декарт, признавая принцип непрерывности не только в математике, но и в физике, возвращается в этом пункте к Аристотелю. «Невозможно, – пишет Декарт, – существование каких-либо атомов, то есть частей материи, неделимых по своей природе, как это вообразили некоторые философы» [16, с. 475]. Соответственно, Декарт не допускает в научный обиход и понятие актуально бесконечного. Актуально бесконечен, по Декарту, лишь бог, но именно потому он и непознаваем. Ведь познание, говорит Декарт, следуя здесь античной традиции, есть полагание предела, границы. «Мы никогда не станем вступать в споры о бесконечном, тем более что нелепо было бы нам, существам конечным, пытаться определить что-либо относительно бесконечного и **полагать ему границы, стараясь постичь его**. Вот почему мы не сочтем нужным отвечать тому, кто спрашивает, бесконечна ли половина бесконечной линии, или бесконечное число четное или нечетное и т.д. О подобных затруднениях, по-видимому, не следует размышлять никому, кроме тех, кто считает свой ум бесконечным. Мы же относительно того, чему в известном смысле не видим пределов, границ, не станем утверждать, что эти границы бесконечны, но будем лишь считать их неопределенными. Так, не будучи в состоянии вообразить столь обширного протяжения, чтобы в то же самое время не мыслить возможности еще большего, мы скажем, что размеры возможных вещей неопределенны. А так как никакое тело нельзя разделить на столь малые части, чтобы каждая из них не могла быть разделена на еще мельчайшие, то мы станем полагать, что количество делимо на части, число которых неопределенно» [16, с. 437–438].

Из этого отрывка видно, что в качестве понятия, доступного человеческому разуму, Декарт признает только потенциальную бесконечность. Как и Аристотель, он мыслит континуум как беспредельно делимое.

Правда, в отличие от Аристотеля, Декарт не считает вселенную конечной. Но характерно, что он называет ее не бесконечной (infinite), а только неопределенной (indefinite), то есть бесконечной потенциально, не имеющей предела. Атомизма же Декарт не признает ни в математике, ни в физике: картезианские корпускулы отличаются от демокритовских атомов тем, что они бесконечно делимы. В этом смысле картезианская программа является континуалистской, как и перипатетическая. Отвергая аристотелианскую физику и космологию по целому ряду параметров, Декарт, однако, полностью разделяет аристотелевский принцип непрерывности.

Таким образом, пересмотр понятий античной науки и философии в XVII в. отнюдь не был универсальным: важнейшее положение античной математики и физики, вначале поколебленное учением о неделимых Галилея, Кавальери, Торричелли, было восстановлено в правах Декартом. Да и Галилей, как мы видели, в вопросе о непрерывности так и не пришел к определенному решению: критикуя Кавальери, он в сущности отказывался от своего революционного переворота.

Споры вокруг принципа непрерывности и природы бесконечно малого не утихали на протяжении XVII и XVIII вв., что, впрочем, не мешало дальнейшей разработке и использованию математического анализа. Характерна попытка Ньютона найти выход из затруднений, связанных с понятием актуально бесконечно малого. Первоначально английский ученый употреблял бесконечно малые величины и пользовался ими, как и его предшественники (в частности, Дж. Валлис) [17], то есть отбрасывал их на том же основании, что и другие математики: поскольку значение их исчезающе мало по сравнению с конечными величинами. Однако затем Ньютон создает так называемую теорию флюксий. «Главное отличие теории флюксий в ее законченном виде от современного ей дифференциального исчисления, – пишет А.П. Юшкевич, – заключается в стремлении изгнать из математики бесконечное при помощи метода первых и последних отношений, то есть пределов» [18, с. 26]. Метод флюксий, содержащий в самой первоначальной формулировке принцип пределов, был со стороны Ньютона попыткой избежать актуально бесконечного и обосновать практически уже вошедшее в обиход математиков отбрасывание бесконечно малых слагаемых. Метод флюксий следующим образом вводится в «Математических началах натуральной философии»: «Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут напоследок равны» [19, с. 57].

Это первая лемма I книги «Начал». Анализируя математические работы Ньютона, в частности его «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», Д.Д. Мордухай-Болтовской замечает, что Ньютон стоял как бы на перепутье – между созданным им методом флюксий и возникшим позднее у Даламбера понятием предела; однако создать теорию предела Ньютону не удалось [20, с. 289]; хотя само понятие «предела» и появляется у Ньютона в «Началах».

Мы не можем сколько-нибудь подробно останавливаться на методе флюксий Ньютона: для нашей цели достаточно показать, что Ньютон искал способа избежать понятия бесконечно малой величины, то есть актуально бесконечного, и его метод первых и последних отношений есть попытка приблизиться к методу исчерпывания древних, вполне строгому и строящемуся на признании лишь потенциальной бесконечности [21].

Аналогичные затруднения с понятием бесконечно малого испытывал Лейбниц, чье отношение к принципу непрерывности весьма показательно для научно-философской мысли XVII–XVIII вв. На теории бесконечно малых Лейбница мы остановимся подробнее, поскольку немецкий ученый не только разработал метод дифференциального исчисления, но и многократно обсуждал те трудности, которые связаны с его обоснованием. Позиция Лейбница в вопросе о бесконечно малых столь же непоследовательна, как и позиция его предшественника Галилея: как и Галилей, Лейбниц, с одной стороны, оперирует этим понятием и сам разрабатывает метод математического анализа, а с другой – он вполне разделяет критическое отношение других математиков и особенно философов к этому понятию-парадоксу. Такая двойственная позиция у Лейбница в сущности сохраняется на протяжении всей его жизни.

В этом отношении очень показательно письмо Лейбница к Фуше от января 1692 г. Фуше в письме к Лейбницу доказывал невозможность оперирования с неделимыми в математике и настаивал на необходимости признать принцип непрерывности в его аристотелевской формулировке. Отвечая Фуше, Лейбниц пишет: «Вы правы, говоря, что коль скоро все величины могут делиться до бесконечности, не существует такой величины, сколь угодно малой, которая в свою очередь не могла бы быть разделена на еще меньшие части, число которых бесконечно» [22, с. 287].

Однако, признав бесконечную делимость любой величины, Лейбниц тут же добавляет: «Впрочем, я не нахожу ничего дурного и в предположении, что эта делимость может быть в конце концов исчерпана, хотя и не вижу в этом никакой нужды» [22, с. 287]. Это замечание стоит в прямом противоречии с признанным только что принципом непрерывности: в самом деле, если делимость может быть исчерпана, значит, могут быть получены последние неделимые элементы, – а это означает, что величины не будут делимы до бесконечности. И тут делу не может помочь оговорка Лейбница: «хотя и не вижу в этом ни какой нужды».

Точно так же «вибрирует» мысль Лейбница в вопросе о бесконечном в его «Новых опытах о человеческом разумении», написанных в 1703–1704 гг. С одной стороны, Лейбниц признает, что в математике нельзя оперировать с понятием актуальной бесконечности. «Не существует бесконечного числа, или бесконечной линии, или какого-нибудь другого бесконечного количества, если брать их как настоящие целые... Истинная бесконечность... заключается лишь в абсолютном, которое предшествует всякому соединению и не образовано путем прибавления частей» [23, с. 157]. В данном случае речь идет о невозможности актуально существующей бесконечно большой величины. Однако и по отношению к актуально существующей бесконечно малой величине Лейбниц здесь высказывается тоже однозначно: «Мы заблуждаемся, пытаясь вообразить себе абсолютное пространство, которое было бы бесконечным целым, составленным из частей. Ничего подобного не существует. Такое понятие внутренне противоречиво, и все эти бесконечные целые, **равно как и их антиподы**, **бесконечно малые**, применимы лишь для математических выкладок, подобно мнимым корням в алгебре» [23, с. 158]. Однако, с другой стороны, Лейбниц в той же работе признает актуально бесконечное множество восприятий, имеющихся в нас в каждый момент, но не сознаваемых нами [23, с. 53], а также актуально бесконечное множество субстанций-монад, или, как он их называет, «метафизических точек». Таким образом, причина «вибрации» Лейбница – в невозможности признать актуальную бесконечность в математике и в то же время в невозможности отвергнуть актуальную бесконечность в физике и метафизике; последние имеют дело с **реально сущим**, с **бытием**, тогда как математика – лишь с **возможным**, конструкцией воображения.

Вот что в этой связи пишет Лейбниц Фуше в 1693 г.: «Я настолько убежден в существовании актуальной бесконечности, что не только не допускаю мысли о том, что природа не терпит бесконечного… а, напротив, считаю, что она повсюду выказывает любовь к нему, дабы тем нагляднее продемонстрировать совершенство творца. Итак, я полагаю, что нет ни одной части материи, которая была бы не скажу только неделимой, но даже не разделенной актуально и, следовательно, любая мельчайшая частица материи должна рассматриваться как мир, наполненный бесчисленным количеством разнообразных созданий» [22, с. 294]. [Здесь в переводе фраза несколько утяжелена, и мысль Лейбница ясна не сразу. В сущности философ утверждает, что любая часть материи не только делима до бесконечности, но и актуально разделена на бесконечное множество физических точек.]

Возражая Декарту и его последователям, не допускавшим возможности для конечного существа мыслить актуально бесконечное, Лейбниц в письме к Мальбраншу замечает: «Ответ, что наш ум, будучи конечным, не понимает бесконечного, неправилен, так как **мы можем доказать и то, чего мы не понимаем**» [22, с. 316]. Не правда ли, эта мысль Лейбница в точности повторяет высказанную Кавальери: хотя бы мы не понимали сущности тех приемов, которыми мы пользуемся, мы тем не менее можем получать с их помощью нужное решение задачи; именно так, справедливо говорит Кавальери, поступают алгебраисты, и математический анализ по своему методу сходен с алгеброй, оперирующей с непостижимыми корнями чисел. Это – целый переворот по сравнению с античной математикой, переворот, основанный на сближении техники вычисления (логистики) и точной науки, приближенного метода вычисления (так понимал метод бесконечно-малых Кеплер) и строго математического доказательства.

Лейбниц, таким образом, допускает актуально бесконечное в тварном мире, а не только в боге; то, что **делимо** до бесконечности, должно быть уже **актуально разделено** на бесконечное число бесконечно малых единиц, ибо, согласно Лейбницу, **возможное** должно иметь свое основание в действительном, потенциальное – в актуальном. Здесь Лейбниц занимает позицию, отличную как от античной – аристотелевско-евклидовской, так и от картезианской.

В этом отношении интересно проанализировать диалог 1776 г. «Пацидий – Филалету», в котором намечены все ходы мысли, воспроизводившиеся затем Лейбницем на протяжении последующих сорока лет. Диалог посвящен трудностям, связанным с проблемой континуума, которая, по Лейбницу, есть узел, еще никем не развязанный. «Ни Аристотель, ни Галилей, ни Декарт не могли обойти этот узел: один его скрыл, другой оставил неразвязанным, третий разрубил» [22, с. 246]. Диалог построен по классическим канонам жанра: принимается допущение, затем обсуждаются его следствия, и оно отвергается в пользу другого, которое затем обсуждается таким же образом. Первое допущение, которое принимает Лейбниц, принадлежит сторонникам составления непрерывного из неделимых. К ним первоначально, до своего приезда в Париж, принадлежал и сам Лейбниц. Вот это допущение: пространство состоит из точек, а время – из моментов «теперь». Поскольку составление линии из конечного числа точек ведет к очевидным несообразностям, например, к невозможности разделить отрезок пополам, то остается допустить, что «линии состоят из точек, но по числу бесконечных» [22, с. 247]. Однако в этом случае пришлось бы согласиться, что диагональ и сторона квадрата равны, а также что целое равно части. Поскольку это невозможно, делается вывод: линия не состоит из точек, и принимается аристотелево определение континуума как делимого до бесконечности. Актуально бесконечное в математике, таким образом, отвергается.

Эту позицию Лейбциц оценивает как «ответ Галилею». Ответ этот гласит: «До обозначения нет никаких точек... Нет точек, линий, поверхностей, т.е. вообще оконечностей (границ, пределов. – *П.Г.*), кроме тех, которые возникают при делении: и в непрерывности нет частей, пока они не созданы делением. Но никогда не осуществляются все деления, какие только осуществимы...» [22, с. 250]. Это – позиция Аристотеля, Евдокса, Декарта, допускающая лишь потенциальную бесконечность.

Однако Лейбниц на этом не останавливается. Хотя, казалось бы, вопрос решен и противоречия сняты, он ставит вопрос о континууме в физике, рассматривая структуру твердых тел и жидкостей и желая теперь возразить Декарту, с которым он только что солидаризировался. «Я не допускаю ни атомов (Гассенди), т.е. совершенно твердого тела, ни тонкой материи Декарта, т.е. совершенно жидкого тела» [22, с. 252].

Модель физической непрерывности, по Лейбницу – это тело, повсюду сгибаемое. «Разделение непрерывности надо уподобить не песку, распадающемуся на отдельные песчинки, а бумаге или ткани, которая может образовать складки: хотя число складок ничем не ограничено и они могут быть все меньше и меньше одна другой, однако тело никогда не распадается на точки или наименьшие части» [22, с. 252]. Для Лейбница главное здесь – что «складки» все время остаются **протяженными величинами**, а не превращаются в «неделимые точки». Однако принципиального отличия от Декарта тут нет, ибо у последнего тоже части материи корпускулы остаются всегда делимыми.

Рассмотрев непрерывность пространства, времени, а затем материи, Лейбниц ставит вопрос о непрерывности по отношению к движению и рассматривает две альтернативных точки зрения. Если принять непрерывное движение, то придется признать, что непрерывность состоит из точек, ибо «движение есть смена двух пребываний, которыми тело связано с двумя ближайшими точками в два ближайших момента…» [22, с. 253]. Поскольку же составленность линии из точек уже была отвергнута, то Лейбниц обращается ко второй возможности – движению скачками. «Между промежутками покоя будет происходить моментальное движение скачком» [22, с. 254]. Скачки эти можно мыслить как своего рода «транскреации», то есть уничтожение тела в одной точке и сотворение его заново в другой, как, по-видимому, решали проблему движения мусульманские математики мутакаллимы: «Движущееся тело *E*, пробыв некоторое время в *A,* исчезает и уничтожается, а в следующий момент снова возникает и возрождается в *B*» [22, с. 255]. Характерно, что признать первую из двух возможностей, а именно непрерывность движения, Лейбницу мешает убеждение в том, что «движение есть смена двух пребываний», то есть что оно прерывно по своему существу. И эта посылка представляется Лейбницу настолько само собой разумеющейся, что он не принимает идею непрерывности движения Аристотеля, средневековых физиков, Декарта. Но и «скачки» тоже не удовлетворяют Лейбница, представляются ему таким же «чудом», что и «совершенная твердость атомов, принимаемая Гюйгенсом» [22, с. 256].

Какой же выход видится здесь немецкому философу? Как ни неожиданно это для читателя, только что принявшего к сведению пассаж о невозможности актуально бесконечного в математических и физических объектах, но Лейбниц вновь возвращается к актуально бесконечному, отвергнутому в споре с Галилеем: «Я думаю так: нет такой части материи, которая не была бы актуально разделена на множество частей, и, следовательно, нет столь малого тела, в котором не содержался бы мир бесчисленных творений... Таким образом, и тело, и пространство, и время актуально подразделены до бесконечности» [22, с. 256]. Соответственно, теперь отвергается непрерывность движения и признаются уже было отброшенные «скачки», но, правда, с одной оговоркой: эти скачки должны быть «бесконечно малыми», а значит, «проскакиваемое» **расстояние** должно быть меньше любой конечной величины» [22, с. 263]. Таков итог размышлений Лейбница.

С известной оговоркой он в конце концов вновь признает и бесконечно малую величину, а именно как «воображаемую»: «В геометрии я допустил бы с эвристической целью бесконечно малые величины пространства и времени, рассматривая их как воображаемые» [22, с. 260].

Можно было бы сказать, что диалог, написанный в 1676 г., еще не вполне зрелое произведение Лейбница, если бы те же самые ходы мысли не были воспроизведены им почти двадцать лет спустя в переписке с Фуше, а затем и в более поздних работах – вплоть до 1716 г. Поэтому нельзя не согласиться с А.П. Юшкевичем, отмечавшим в одной из своих статей непоследовательность Лейбница: «Великий философ и математик высказывал в разное время различные мнения о сущности исчисления бесконечно малых. Иногда, например, он рассматривал дифференциал dx как конечный, но крайне малый отрезок, по крайней мере, пропорциональный конечному отрезку. Очень часто, особенно в более поздние годы жизни, он отзывался о бесконечно малых как об идеальных вещах и понятиях, как об удобных в эвристическом отношении фикциях, результаты применения которых можно, если угодно, получить с помощью строгого доказательства исчерпыванием. Наконец, у него имеется и та мысль, что бесконечно малые суть величины меньше всякой конечной величины, хотя и не нулевые, величины «несравнимые» в том смысле, что на какую бы конечную величину их ни умножить, результат не будет конечной величиной» [18, с. 14–15]. И действительно, точка зрения Лейбница на бесконечно малую все время неустойчива, потому что он в своей физике и метафизике принимает актуальную бесконечность, что не может не отражаться и на его понимании бесконечного в математике.

В то же время в философии Лейбница идея непрерывности играет существенную роль: актуально существующие метафизические и физические «точки», единицы (монады) составляют своего рода непрерывную цепь, лишенную «промежутков», «разрывов», «скачков». Характерно, что П.А. Флоренский, отвергая идею непрерывности, которая, по его мнению, господствовала в науке и философии XIX в., возводит эту идею прежде всего к Лейбницу [24]. Однако лейбницево понимание непрерывности, как мы видели, существенно отличается от традиционного, к которому тяготел Декарт, а впоследствии – Кант: у Лейбница идея непрерывности имеет предпосылкой принятие актуально бесконечного. Так, вводя понятие «незаметных», «бесконечно малых восприятий», возникшее у него по аналогии с математической бесконечно малой, Лейбниц пишет: «Незаметные восприятия имеют такое же большое значение в пневматике, какое незаметные корпускулы имеют в физике... Ничто не происходит сразу, и одно из моих основных и достоверных положений – это то, что природа никогда не делает скачков... Значение этого закона в физике очень велико: в силу этого закона всякий переход от малого к большому и наоборот совершается через промежуточные величины... Точно так же никогда движение не возникает непосредственно из покоя, и оно переходит в состояние покоя лишь путем меньшего движения... Придерживаться другого взгляда – значит не понимать безграничной тонкости вещей, **заключающей в себе всегда и повсюду актуальную бесконечность**» [23, с. 56]. Эти последние слова об актуальной бесконечности кладут водораздел между традиционным принципом непрерывности как бесконечности потенциальной (бесконечной делимости) и лейбницевым толкованием этого принципа.

Философское обоснование по-новому истолкованного им принципа непрерывности Лейбниц предлагает в «Монадологии». Здесь на новом уровне воспроизводится старый парадокс, возникающий при попытке составлять непрерывное из неделимых. С одной стороны, Лейбниц определяет монаду как простую субстанцию, не имеющую частей, а значит, нематериальную (все материальное имеет части и делимо). Он поясняет, что «где нет частей, там нет ни протяжения, ни фигуры и невозможна делимость» [22, с. 413]. С другой стороны, Лейбниц говорит, что «сложная субстанция есть не что иное, как собрание или агрегат простых» [25]. Выходит, что сложное (т.е. непрерывное) мы получаем из суммы бесконечного числа простых (неделимых), статус которых так же неясен, как и статус математической бесконечно-малой: это и не величины (ибо монады, по Лейбницу, нематериальны, не имеют протяжения), и не «нули» (ибо, как позднее мы узнаем, всякая монада обладает «телом»).

Монада у Лейбница мыслится по аналогии с душой: именно души по определению неделимы. Но тогда выходит, что тело как сложная субстанция составляется из бесконечного числа душ – субстанций простых. Пытаясь выйти из этого затруднения, Лейбниц прибегает к метафоре: сравнивает тела с «прудом, полным рыбы» (где рыбы – это, надо думать монады) [26]. Но в таком случае что такое та «вода», в которой обитают «рыбы»? Если реальны только монады, как и заявляет Лейбниц, то «вода» тоже состоит из новых неделимых и так до бесконечности. Противоречие не разрешается. Для его разрешения Лейбниц прибегает еще к одному средству: рассматривать материю не как субстанцию, а как «субстанциат», подобный армии или войску. «В то время как ее рассматривают так, будто она есть некая вещь, на самом деле она есть феномен, но вполне истинный, из которого наше восприятие создает единство» [27, s. 624].

Рассмотрение материи как «феномена», пусть даже «хорошо обоснованного» (хотя самого этого обоснования Лейбниц так и не смог предъявить), означает – правда, на другом языке – возвращение к предпосылкам Аристотеля, трактовавшего материю как возможность, а не действительность. Но для последовательного проведения такой точки зрения необходимо отказаться от понятия актуальной бесконечности применительно к конечному (тварному) миру: ведь Аристотель в свое время потому и определил материю как бесконечно делимое, что она принадлежала у него к сфере **возможного**. Лейбниц же, объявляя материю феноменом, в то же время сохраняет в силе вышеприведенные тезисы:

1) в каждой части материи «содержится» актуально бесконечное число монад;

2) всякая душа обладает телом. Последнее утверждение совершенно лишено смысла, если считать, что тело – это феномен; первое, впрочем, тоже, хотя, может быть, это и не так очевидно.

Как видим, даже Лейбницу не удалось разрешить парадоксы актуальной бесконечности и последовательно провести принцип непрерывности в математике. Вопрос остался открытым и в философии. К нему во второй половине XVIII в. вновь обратились как математики, так и философы.

В философии проблему непрерывности попытался разрешить Кант, столкнувшись с затруднениями, которые эта проблема породила у Лейбница, с одной стороны, и у математиков – с другой. Рождение трансцендентального идеализма в немалой степени было обусловлено необходимостью справиться с парадоксами актуальной бесконечности. По Канту, подлинным бытием обладают лишь вещи в себе, которые суть простые, неделимые единства, лишенные протяжения. От лейбницевых монад, однако, эти единства отличаются тем, что они, во-первых, непознаваемы, а во-вторых, из них недопустимо «составлять» материальные тела, то есть рассматривать сложное как «агрегат» простого. Что же касается мира явлений, протяженного в пространстве и длящегося во времени (которые как раз суть априорные формы, с помощью которых порождается мир явлений), то он непрерывен, то есть бесконечно делим. Именно разделение сущего на вещи в себе и явления позволяет Канту решить проблему континуума: непрерывность пространственно-временного мира не противоречит, так сказать, «дискретности» мира сверхприродного.

В «Метафизических началах естествознания» (1786 г.) Кант пишет: «Сколь далеко... простирается математическая делимость пространства, наполненного той или иной материей, столь же далеко простирается и возможное физическое деление субстанции, его наполняющей. Но математическая делимость бесконечна, следовательно, и физическая, то есть всякая материя, до бесконечности делима, и притом на части, из которых каждая в свою очередь есть материальная субстанция» [28, с. 103]. Последнее замечание имеет целью подчеркнуть, что в материи нет «последних неделимых» элементов, которые оказались бы чем-то сверхматериальным: всякая часть материи, как и пространства, делима до бесконечности. Здесь Кант возвращается к Аристотелю и следовавшему за ним Декарту. И объяснение этой бесконечной делимости Кант дает в духе Аристотеля, хотя для достижения такой позиции ему пришлось пойти совсем не аристотелевским и не характерным для античности путем: допустить феноменальный характер эмпирического мира. Это путь, на который Лейбниц последовательно встать не смог.

Перед Кантом стояла альтернатива. Если принять материю за субстанцию, и притом не тождественную пространству, как это было у картезианцев, то допущение бесконечной делимости материи требовало бы допустить, что она состоит из актуально бесконечного множества «последних единиц» – путь, которым пошел Лейбниц, отвергнув физический атомизм во имя принципа бесконечной делимости. Но если считать, как Аристотель, что материя – это лишь возможность, то нет надобности искать **в самой материи** бесконечной **разделенности** в качестве условия ее бесконечной **делимости**. Кант объявил материю только явлением, для того чтобы можно было выбрать второй путь – возвращение к принципу непрерывности в его аристотелевско-евдоксовом варианте. «О явлениях, деление которых можно продолжить до бесконечности, можно лишь сказать, что частей явления столько, сколько их будет дано нами, пока мы будем в состоянии продолжать деление. Ведь части, как относящиеся к существованию явлений, существуют лишь в мыслях, то есть в самом делении» [28, с. 103]. Иначе говоря, если материя не есть вещь в себе, то нет надобности допускать актуальной бесконечности (частей) для обоснования потенциальной бесконечности, то есть процесса деления.

Феноменалистское истолкование пространства, времени и материи позволяет Канту вернуться в XVIII в. к классической античной теории непрерывности.

Возвращение к потенциальной бесконечности при обосновании дифференциального исчисления происходит и в математике второй половины XVIII в., хотя полностью преодолеть идею актуально бесконечно малого и создать теорию пределов, опирающуюся на методологические принципы метода исчерпывания, удалось только позднее, усилиями К.Ф. Гаусса, Б. Больцано, О. Коши и особенно К. Вейерштрасса.

Противоречивость понятия бесконечно малого, как мы видели, была очевидна с самого появления этого понятия; не случайно Ньютон создавал теорию первых и последних отношений, стремясь избежать «бесконечно малых». Это стремление особенно усилилось после критики инфинитезимального исчисления, осуществленной Беркли. Не удивительно поэтому, что Даламбер в своих статьях «Дифференциал» (1754 г.), «Флюксия» (1756 г.), «Бесконечно малое» (1759 г.) и «Предел» (1765 г.), помещенных в знаменитой «Энциклопедии, или Словаре наук, искусств и ремесел», в качестве обоснования анализа предложил теорию пределов. При этом он опирался на ньютоновский принцип «первых и последних отношений». Дальнейшие шаги в этом направлении были предприняты Лагранжем. В 1784 г. по инициативе Лагранжа Берлинская Академия наук назначила приз за лучшее решение проблемы бесконечного в математике. Объявление об условиях конкурса гласило: «...Всеобщим уважением и почетным титулом образцовой «точной науки» математика обязана ясности своих принципов, строгости своих доказательств и точности своих теорем. Для обеспечения непрестанного обновления столь ценных преимуществ этой изящной области знания необходима ясная и точная теория того, что называется в математике бесконечностью. Хорошо известно, что современная геометрия (математика) систематически использует бесконечно большие и бесконечно малые величины. Однако геометры античности и даже древние аналитики всячески стремились избегать всего, что приближается к бесконечности, а некоторые знаменитые аналитики современности усматривают противоречивость в самом термине **бесконечная величина**. Учитывая сказанное, Академия желает получить объяснение, каким образом столь многие правильные теоремы были выведены из противоречивого предположения, вместе с формулировкой точного, ясного… истинно математического принципа, который был бы пригоден для замены принципа **бесконечного** и в то же время не делал бы проводимые на его основе исследования чрезмерно сложными или длинными» [29, с. 175].

Однако, как мы уже говорили, строгое решение поставленной Берлинской Академией проблемы было предложено только в XIX в. Решающую роль играли здесь работы О. Коши. Метод, им предложенный, сходен с античным методом исчерпывания и тоже исключает обращение к актуально бесконечному. Вот как определяет Коши вводимое им понятие предела: «Если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно (indefiniment) приближаются к фиксированному значению таким образом, чтобы в конце концов отличаться от него сколь угодно мало, то последнее называют пределом всех остальных» [30, с. 19]. Бесконечно малая определяется здесь как переменная, последовательные численные значения которой становятся меньше любого данного положительного числа [31, с. 17].

Именно благодаря философии Канта, с одной стороны, и разработанной в XIX в. теории пределов, с другой, в XIX в. и в самом деле принцип непрерывности, близкий к его античному пониманию, стал играть важную роль. В заключение мне хотелось бы остановиться еще на одном, последнем моменте – на понятии непрерывного, как оно было разработано Р. Дедекиндом в 60–70-х гг. XIX в.

В связи с необходимостью обосновать теорию пределов к проблеме непрерывности в 60–70-х гг. XIX в. обратился немецкий математик Р. Дедекинд. Считая недостаточно строгим введение понятия предела с помощью геометрической наглядности, Дедекинд попытался найти арифметическое обоснование анализа бесконечных. «Говорят часто, что дифференциальное исчисление занимается непрерывными величинами, однако же нигде не дают определения этой непрерывности, и даже при самом строгом изложении дифференциального исчисления доказательства не основывают на непрерывности...» [31, с. 9–10]. В результате напряженных поисков Дедекинд достиг цели: он предложил принцип непрерывности, который, по его убеждению, удовлетворял самым строгим требованиям. «В предыдущем параграфе, – пишет Дедекинд, имея в виду свою работу “Непрерывность и иррациональные числа” – обращено было внимание на то, что каждая точка *P* прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, то есть в следующем: “Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение на два класса, это рассечение прямо на два куска”» [31, с. 17].

На первый взгляд, это определение непрерывности совпадает с аристотелевским. Как мы помним, согласно Аристотелю, непрерывно то, концы чего образуют единое. Применительно к прямой это значит: непрерывна та прямая, два отрезка которой имеют только одну общую точку. О том же, как видим, говорит и Дедекинд. И не случайно после выхода в свет работы Дедекинда математик Р. Лифшиц указал ему на то, что открытая Дедекиндом аксиома непрерывности совпадает с теорией отношений Евдокса, основанной на том же принципе, что и аристотелево понятие непрерывности. «Я не отрицаю обоснованности Вашей дефиниции, – писал Р. Лифшиц, – я лишь думаю, что она только по форме выражения, а не по существу отличается от того, что установили древние. Я могу только сказать, что установленное Евклидом определение (кн. V, опр. 4), которую я привожу по-латыни, я считаю столь же удовлетворительным, как и Ваше определение: rationem. habere inter se mapnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo suprrare (говорят, что величины имеют отношение между собой, если, взятые кратно, они могут превзойти друг друга)» [32, s. 237]. Отвечая Лифшицу, Дедекинд, однако, настаивает на том, что «одни только евклидовы принципы, без привлечения принципа непрерывности, который в них **не содержится**, неспособны обосновать совершенную теорию реальных чисел как отношений величин... И напротив, благодаря моей теории иррациональных чисел создан совершенный образец **непрерывной** области, которая именно поэтому способна характеризовать всякое отношение величин определенным содержащимся в нем числовым индивидуумом (Zahlen = Indi-viduum)» [32, s. 240].

При этом Дедекинд подчеркивает, что он не случайно мыслит континуум как **арифметический** и само обоснование анализа стремится дать с помощью арифметики: он не хочет «привлекать довольно темное и сложное понятие величины» [32, s. 241]. Все это говорит о том, что действительно Дедекинд иначе мыслит непрерывное, чем Аристотель. Для Аристотеля непрерывное – это то, что бесконечно делимо, то есть потенциально бесконечное; для Дедекинда же непрерывное содержит в себе актуально бесконечное множество «сечений», то есть «числовых индивидуумов». Дедекинд вводит постулат **существования всех** сечений и порождающих их реальных чисел, справедливо указывая на то, что такой постулат не был нужен Евдоксу. Не случайно теория непрерывности Дедекинда имеет общую базу с теорией множеств Г. Кантора: оба опираются на понятие актуально бесконечного. «К определению некоторого иррационального реального числа, – пишет Г. Кантор, – всегда принадлежит хорошо определенное бесконечное множество первой мощности рациональных чисел; в этом состоит общее всех форм дефиниции...» [32, с. 243]. В основе определения непрерывности Дедекинда, справедливо замечает Кантор, лежит **совокупность всех** рациональных чисел.

По-видимому, та характеристика теоретико-множественного понимания континуума, которую дает Г. Вейль, может быть отнесена и к теории континуума Дедекинда. «…Наша концепция, – говорит Вейль, имея в виду концепцию Г. Кантора, – остается по-прежнему статической, характерным для нее является ничем не ограниченное применение терминов «все» и «существует» не только к натуральным числам, но также и к местам в континууме, т.е. к возможным последовательностям или множествам натуральных чисел. В этом и заключается сущность теории множеств: она рассматривает в качестве замкнутой совокупности существующих самих по себе предметов не только числовой ряд, но и совокупность его подмножеств. Поэтому она целиком базируется на почве актуально бесконечного» [33, с. 73]. Когда Вейль характеризует теоретико-множественную концепцию как «статическую», он имеет в виду то же различение бесконечного как «бытия» и как «становления», о котором у нас шла речь выше. Дедекинд в своей трактовке непрерывности возвращается, таким образом, не к Аристотелю и Евклиду, а, скорее, к Лейбницу, у которого речь идет не просто о бесконечной делимости как незавершимом процессе («становления»), а о «бесконечной разделенности» как завершенном состоянии (т.е. «бытии»).

Вероятно, именно в силу того, что принцип непрерывности математики и философы уже более ста лет отождествляют с аксиомой непрерывности Дедекинда, античная его формулировка представляется чем-то архаическим, нестрогим и неточным. Чаще всего в научном обиходе античный метод вообще не фигурирует, оказывается вне поля зрения, как это хорошо показывает И.Г. Башмакова, сранивая Евдокса и Дедекинда. «Общая теория отношений, – пишет И.Г. Башмакова, – была построена Евдоксом Книдским в IV в. до н. э. и дошла до нас в изложении Евклида... Она **оставалась по су-**

ществу непонятной и считалась весьма искусственной, пока Р. Дедекинд не построил в 1870–1871 гг. прошлого века свою теорию сечений, с помощью которой определил действительные числа. И тогда все вдруг «поняли» теорию Евдокса, которая основана на той же конструкции, что и теория сечений» [34, с. 186].

А между тем всякий раз, когда оперирование понятием актуально бесконечного приводит к парадоксам, как это служилось и с теорией множеств, математическая мысль вновь пытается обосновать свои построения на понятии «становления» (возможности), а не «бытия» (действительности). И независимо от того, известна ли математикам Аристотелева (и Кантона) теория непрерывности, они невольно вновь обращаются к ней.

Так, в XX в. близкую к античной математике точку зрения на непрерывность обосновывал Л.Э. Брауэр, построивший, по словам Вейля, «строгую математическую теорию континуума, рассматривающую последний не как некое застывшее бытие, но как среду свободного становления» [33, с. 22]. Мы не будем здесь рассматривать принцип непрерывности Брауэра – достаточно лишь указать на то, что характерная для античности постановка проблемы континуума отнюдь не была отменена в период становления науки Нового времени, хотя аристотелевская теория движения, как и учение о конечном космосе, в XVIII в. были отвергнуты. К тем принципам, которые после довольно длительного периода их критики (отчасти у Галилея, затем – у Кавальери и Торичелли, а также в математическом анализе – у Валиса, братьев Бернулли и других математиков, опиравшихся на понятие актуально существующего бесконечно малого) вновь получили признание в математике и философии в XVIII и XIX вв., принадлежат, как мы видели, теория отношений Евдокса и понятие непрерывности Аристотеля. Судьба античной идеи непрерывности свидетельствует о том, насколько неверно то представление (получившее сегодня широкое распространение как среди философов, так и среди ученых), что наука в собственном смысле слова начинается только в XVII в. Столь же несостоятельно и утверждение, что существует столько же разных, не совместимых между собой «наук», сколько имеется разных «культур», а потому понятия, которыми оперирует, скажем, аристотелевская физика, совершенно не переводимы на язык физики Нового времени. Конечно, в рамках различных культурно-исторических контекстов научные теории имеют свои особенности, но эти особенности нельзя слишком абсолютизировать, иначе окажется невозможной никакая историческая реконструкция прошлого.

Рассмотрение исторической судьбы того или иного научного понятия или принципа может оказаться весьма плодотворным как для того, чтобы более корректно пользоваться понятием «научная революция», так и для того, чтобы показать реальные возможности истории науки в плане реконструкции проблемы, сохраняющей свое значение на протяжении веков и даже тысячелетий. И, быть может, такая реконструкция может оказаться полезной также и для решения этой проблемы – по крайней мере для ее более четкой и сознательной постановки.

ЛИТЕРАТУРА

1. «Сопоставление истории философии и истории естествознания позволяет констатировать, что философия обладает определенными прогностическими возможностями по отношению к естественнонаучному поиску, поскольку она способна заранее вырабатывать необходимые для него категориальные структуры». – *Степин В.С.* О прогностической природе философского знания: Философия и наука // Вопросы философии». – 1986. – № 4. – С. 42.
2. *Аристотель.* Физика // *Аристотель*. Соч.: В 4 т. – М., 1981. – Т. 3 (Сер. «Философское наследие»).
3. *Евклид.* Начала, кн. I–VI.
4. Еще до Кавальери метод исчисления неделимых применил Кеплер в своей «Стереометрии винных бочек». Однако, подобно античным математикам, он рассматривал этот метод лишь как технику вычисления, а не как строго **научный**, то есть математический метод.
5. *Галилей.* Избр. тр.: В 2 т. – М., 1964. – Т. 2.
6. С помощью понятия «неделимых» Галилей пытается решить задачу «колеса Аристотеля»: при совместном качении двух концентрических кругов больший проходит то же расстояние, что и меньший. Как это возможно? «Разделяя линию на некоторые конечные и потому поддающиеся счету части, нельзя получить путем соединения этих частей линии, превышающей по длине первоначальную, не вставляя пустых пространств между ее частями; но представляя себе линию, **разделенную на неконечные части**, т.е. на **бесконечно многие ее** неделимые, мы можем мыслить ее колоссально растянутой без вставки конечных пустых пространств, а путем вставки бесконечно многих неделимых пустот» [5, с. 135].
7. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. – М., 1984.
8. *Lasswitz K.* Geschichte der Atomistik. I. – 1890.
9. *Кавальери Б.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. – М.–Л., 1940. – С. 277.
10. Вот что говорит об этом сам Кавальери: «От меня не скрыто, что о строении континуума и о бесконечном весьма много спорят философы, выдвигая такие положения, которые находятся в разногласии с немалым числом моих принципов. Они будут колебаться либо потому, что понятие **всех линий** или **всех плоскостей** кажется им непонятным и более темным, чем мрак киммерийский, либо потому, что мой взгляд склоняется к строению континуума из неделимых, либо, наконец, потому, что я осмелился признать за прочнейшее основание геометрии тот факт, что одно бесконечное может быть больше другого» [11, с. 223].
11. *Зубов В.П.* Развитие атомистических представлений до начала XIX века. – М., 1965. – С. 223.
12. *Cavalerius D.* Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. – Bononia, 1635. – Lib. VII. – P. 2.
13. Галилей называл их иногда «невеличинами», пытаясь избежать парадоксов. «Самая возможность продолжать деление на части приводит к необходимости сложения из бесконечного множества невеличин» [5, с. 142].
14. *Лурье С.Я.* Математический эпос Кавальери / Предисловие к кн.: *Кавальери Б.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. – М.–Л., 1940.

15. «Утверждали иногда, – пишет по этому поводу В.П. Зубов, – что Галилей продолжил традицию Демокрита. С гораздо большим основанием можно говорить, однако, о традиции Архимеда. Ведь мы знаем, что, по Демокриту, континуум слагался из элементов того же рода (тела из мельчайших тел и т.д.), тогда как у Архимеда речь шла об элементах n–1 порядка» [11, с. 215–216].
16. *Декарт Р.* Избранные произведения. – М., 1960.
17. В «Трактате о конических сечениях, изложенных новым методом» (1655) Валлис, ссылаясь на Кавальери, рассматривает площади плоских фигур как составленные из бесконечно многих параллельных линий. При этом, как пишет А.П. Юшкевич, «бесконечно малое количество то отождествляется с нулевым.., то параллелограммы бесконечно малой высоты объявляются вряд ли чем-либо иным, нежели линия...» (*Юшкевич Т.А*. Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса // Историко-математические исследования. Вып. XXX. – М., 1986. – С. 25). Валлис, таким образом, воспроизводит те же принципы, что мы видели у Кавальери, и, соответственно, те же теоретические затруднения.
18. *Юшкевич А.П.* Идеи обоснования математического анализа в XVIII в. // Историко-математические исследования. – М., 1986. – Вып. XXX.
19. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. – М., 1989.
20. *Мордухай-Болтовской Д.Д.* Комментарии к Ньютону // *Ньютон И.* Математические работы. – М.–Л., 1937.
21. Интересно, что известный математик К. Маклоран, пытавшийся защитить ньютоновский метод флюксий от критики Дж. Беркли (в сочинении «Аналист», 1734), в своем «Трактате о флюксиях» сближает метод Ньютона с методом исчерпывания Евклида и Архимеда. В основе метода исчерпывания лежит сколь угодно точное приближение к искомой величине с помощью сходящихся к ней сверху и снизу последовательностей известных величин. Вот как формулирует сущность метода исчерпывания Маклоран: если две переменные величины *AP* и *AQ*, находящиеся друг к другу в неизменном отношении, одновременно приближаются к двум определенным величинам AB и AD так, что разности между ними оказываются меньшими любой заданной величины, то отношение пределов будет тем же, что и отношение переменных величин *AP* и *AQ* (см.: *Maclaurin C.* Treatise of Fluxions in Two Books. T. I: 1742. – P. 6).
22. *Лейбниц Г.В*. Соч. – М., 1984. – Т. 3.
23. Там же. – Т. 2.
24. «Необходимо указать на источник, откуда вытекла эта идея в широкую публику и сделалась столь распространенной. Нет никакого сомнения, что таким первоисточником является открытие анализа бесконечных, и, говоря определеннее, мы можем утверждать, что Лейбниц как математик и философ ввел в общественное сознание идею непрерывности; мы можем даже сказать, что система Лейбница есть почти вся целиком коррелят его работ по анализу, гениальная транспонировка самим изобретателем математических данных на философский язык». – *Флоренский П.А.* Введение к диссертации «Идея прерывности как элемент миросозерцания» / Историко-математические исследования. – М., 1986. – Вып. XXX. – С. 160.
25. *Лейбниц*. Соч. – Т. 1. – С. 413: «Сложная субстанция есть не что иное, как собрание, или агрегат, простых».
26. «...Не существует части вещества, в которой бы не было бесконечного множества органических и живых тел... Однако отсюда еще не следует, что всякая часть вещества одушевлена, точно так же как мы не говорим, что пруд, полный рыбы, одушевлен, хотя рыбы – одушевленные существа». – *Лейбниц.* Избр. философ. соч. – М., 1908. – С. 240.

27. *Leibniz G.W.* Die philosophischen Schriften. Hrsg. von C.I. Gerhardt. – B., 1885. – Bd. VI.
28. *Кант И.* Соч. – М., 1966. – Т. 6.
29. *Клайн М.* Математика, Утрата определенности. – М., 1984. Характерно, что победитель конкурса, швейцарский математик С. Люилье представил работу под девизом: «Бесконечность – пучина, в которой тонут наши мысли» (см.: там же).
30. *Коши О.Л.* Алгебраический анализ. – СПб., 1864.
31. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. – Одесса, 1923.
32. Цит. по: *Becker O.* Grundlage der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. – Frankfurt a. M., 1975.
33. *Вейль Г.* О философии математики. – М.–Л., 1934 (репринт: М., 2005). – С. 73.
34. *Башмакова И.Г.* О роли интерпретаций в истории математики // Историко-математические исследования. – М., 1982. – Вып. XXX. – С. 182–194.